

NOTA denotes “None of the Above.”

1. Compute  $\int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx$ .  
(A) 0      (B)  $\frac{1}{2}$       (C) 1      (D) 2      (E) NOTA
2. Compute  $\int_0^2 \frac{x}{2+x} \, dx$ .  
(A)  $2 - \ln 4$       (B)  $2 - \ln 2$       (C)  $2 + \ln 2$       (D)  $2 + \ln 4$       (E) NOTA
3. Compute  $\int_0^{4\pi} |\sin 2x| \, dx$ .  
(A) 2      (B) 4      (C) 8      (D) 16      (E) NOTA
4. Using a trapezoidal sum on 6 equal subintervals, estimate the value of  $\int_2^{20} (4x + 1) \, dx$ .  
(A) 800      (B) 810      (C) 820      (D) 830      (E) NOTA
5. What is the total area bounded by the graph of  $f(x) = x^3$  and its inverse  $f^{-1}(x)$ ?  
(A)  $\frac{1}{8}$       (B)  $\frac{1}{4}$       (C)  $\frac{1}{2}$       (D) 1      (E) NOTA
6. Compute  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{i}{i^2 + n^2}$ .  
(A)  $\frac{\ln 2}{2}$       (B)  $\ln 2$       (C)  $\frac{\pi}{4}$       (D)  $\frac{\pi}{2}$       (E) NOTA
7. What is the length of the polar curve  $r = \theta^2$  from  $\theta = 0$  to  $\theta = 2$ ?  
(A)  $\frac{8\sqrt{2}-4}{3}$       (B)  $\frac{8\sqrt{2}}{3}$       (C)  $\frac{16\sqrt{2}-8}{3}$       (D)  $\frac{16\sqrt{2}}{3}$       (E) NOTA
8. If  $g(x)$  is an even function and  $\int_{\mathbb{R}} g(x) \, dx = 4$  then compute the value of  $\int_0^{\infty} g(x) \, dx$ .  
(A) 0      (B) 2      (C) 4      (D) Diverges      (E) NOTA
9.  $e^x(\cos x - \sin x)$  is the derivative of which of the following?  
(A)  $e^x(\cos x - \sin x)$       (B)  $e^x \cos x$       (C)  $e^x \sin x$       (D)  $e^x(\cos x + \sin x)$       (E) NOTA

10. Compute  $\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty (-x^2)^n dx$ .  
(A)  $\ln 2$       (B)  $\frac{\pi}{4}$       (C)  $2 \ln 2$       (D)  $\frac{\pi}{2}$       (E) NOTA
11. The function  $f(x) = kx(1-x)^3$  defines a probability density function on  $[0, 1]$  for some real  $k$ . Compute  $k$ .  
(A) 18      (B) 20      (C) 24      (D) 25      (E) NOTA
12. Let  $R$  be the region bounded by the parametric equations  $x(t) = 2t$  and  $y(t) = t/(t^2 + 1)$  and the  $x$  axis over the interval  $t \in [0, 1]$ . What is the area of  $R$ ?  
(A)  $\ln 2$       (B)  $\ln 3$       (C)  $2 \ln 2$       (D)  $\ln 5$       (E) NOTA
13. Compute  $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$ .  
(A)  $\frac{1}{2}$       (B)  $\frac{\pi}{4}$       (C) 1      (D)  $\frac{\pi}{2}$       (E) NOTA
14. Compute  $\int_1^\infty \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$ .  
(A) 1      (B) 2      (C) 4      (D) 8      (E) NOTA
15. Compute  $\int_0^{2\pi} \sin(\sin x - x) dx$ .  
(A)  $-1$       (B) 0      (C) 1      (D)  $\pi$       (E) NOTA
16. Compute  $\int_0^1 x \ln(1-x) dx$ .  
(A)  $-1$       (B)  $-\frac{3}{4}$       (C)  $-\frac{1}{2}$       (D)  $-\frac{1}{4}$       (E) NOTA
17. Compute  $\int_0^4 (x-7)(x-2)^5 dx$ .  
(A)  $\frac{128}{7}$       (B)  $\frac{160}{7}$       (C)  $\frac{192}{7}$       (D)  $\frac{256}{7}$       (E) NOTA

18. Compute  $\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} dx$ .
- (A)  $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$       (B)  $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}$       (C)  $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$       (D)  $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$       (E) NOTA
19. Let  $f(x)$  be a cubic polynomial with leading coefficient 1 and a root at  $x = 0$ . If  $\int_0^1 f(x) dx = 1$  then what is the sum of all possible values of  $f(\frac{2}{3})$ ?
- (A)  $\frac{16}{27}$       (B)  $\frac{2}{3}$       (C)  $\frac{5}{3}$       (D)  $\frac{35}{27}$       (E) NOTA
20. Compute  $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$ .
- (A)  $\frac{\pi \ln 2}{8}$       (B)  $\frac{\pi}{8}$       (C)  $\frac{\pi \ln 2}{4}$       (D)  $\frac{\pi}{4}$       (E) NOTA
21. If  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2} = 4$ , then what is the value of  $f(0) + f'(0)$ ?
- (A) 0      (B) 4      (C) 8      (D) 12      (E) NOTA
22. Compute  $\int_{1/2}^2 \frac{x^4 - 1}{x^5 + x} dx$ .
- (A) 0      (B)  $2 \ln 2$       (C)  $\ln \frac{17}{4}$       (D)  $2 \ln \frac{17}{4}$       (E) NOTA
23. What is the smallest possible real value  $n$  for which  $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^n} dx$  diverges?
- (A) 0      (B) 1      (C) 2      (D) 3      (E) NOTA
24. Compute  $\int_0^\infty \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^2 e^{-x} dx$ .
- (A)  $\frac{1}{8}$       (B)  $\frac{1}{4}$       (C)  $\frac{1}{2}$       (D) 1      (E) NOTA

25. Compute  $\int_0^1 x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor dx$  where  $\lfloor x \rfloor$  is the greatest integer less than or equal to  $x$ .  
(A)  $\ln 2$       (B)  $\ln \pi$       (C)  $\ln 4$       (D) 1      (E) NOTA
26. Evaluate  $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \tan^{2022}(x)} dx$ .  
(A)  $\frac{\pi}{8}$       (B)  $\frac{\pi}{4}$       (C)  $\frac{\pi}{2}$       (D)  $\pi$       (E) NOTA
27. Let  $I = \int_6^{18} \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+6}}\right) dx$ . Then  $I$  can be written in the form  $a\pi - b\sqrt{c} + d$ , where  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$  and  $c$  is squarefree (i.e. not divisible by the square of any prime). Find  $a+b+c+d$ .  
(A) 5      (B) 10      (C) 15      (D) 20      (E) NOTA
28. Evaluate  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2021x)}{\sin(x)} dx$ .  
(A)  $\frac{\pi}{8}$       (B)  $\frac{\pi}{4}$       (C)  $\frac{\pi}{2}$       (D)  $\pi$       (E) NOTA
29. Approximate  $\int_0^1 (8x^3 - 3x^2 + 2022x - 1000) dx$  using Simpson's rule with  $n = 2022$  subdivisions.  
(A) 12      (B) 87      (C) 2022      (D) 43923      (E) NOTA
30. Compute  $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dy dx$ .  
(A)  $\frac{\pi}{4}$       (B)  $\frac{\pi^2}{12}$       (C)  $\frac{\pi}{2}$       (D)  $\frac{\pi^2}{6}$       (E) NOTA